

[연습문제 답안 이용 안내]

- 본 연습문제 답안의 저작권은 한빛아카데미(주)에 있습니다.
- 이 자료를 무단으로 전재하거나 배포할 경우 저작권법 136조에 의거하여 최고 5년 이하의 징역 또는 5천만원 이하의 벌금에 처할 수 있고 이를 병과(併科)할 수도 있습니다.

제11장 이산 시간 푸리에 변환

[Quick Review]

※ 다음 문제에서 맞는 것을 골라라.

(1) 이산 비주기 신호의 스펙트럼은 (이산, 연속)인 (주기, 비주기) 함수이다.

Ans) 연속, 주기

(2) 이산 시간 푸리에 역변환은 전 주파수 구간에 대해 적분해야 한다. (○, ×)

Ans) ×

(3) DTFT를 할 수 없는 신호는 존재하지 않는다. (○, ×)

Ans) ×

(4) (에너지, 전력) 신호는 DTFT의 수렴 조건을 만족한다.

Ans) 에너지

(5) DTFT한 스펙트럼에 임펄스가 포함되는 것은 (에너지, 전력, 불연속) 신호이다.

Ans) 전력

(6) 주기 신호의 DTFS와 DTFT에 의한 선 스펙트럼 간격은 (같다, 다르다).

Ans) 같다

(7) 이산 전력 신호의 푸리에 변환은 DTFT의 정의식으로 계산할 수 있다. (○, ×)

Ans) ×

(8) 임펄스 신호의 스펙트럼은 모든 주파수에 대해 존재한다. (○, ×)

Ans) ○

(9) DTFT는 주파수에 대한 주기 함수이다. (○, ×)

Ans) ○

(10) 이산 실수 신호의 (진폭, 위상) 스펙트럼은 기대칭을 만족한다.

Ans) 위상 스펙트럼

(11) 신호를 시간 이동하면 진폭과 위상 스펙트럼이 모두 변한다. (○, ×)

Ans) ×

(12) 시간축 상에서 신호를 늘이면 주파수축 상에서 스펙트럼이 (압축된다, 늘어난다).

Ans) 압축된다

(13) 신호의 다른 주파수 성분끼리도 에너지를 형성한다. (○, ×)

Ans) ×

(14) 이산 시스템의 주파수 응답은 주기 함수이다. (○, ×)

Ans) ○

(15) 이산 주파수 응답은 입력의 형태에 따라 달라진다. (○, ×)

Ans) ×

(16) 이산 시스템의 주파수 응답은 (임펄스 응답, 고유 응답, 정상태 응답)의 DTFT이다.

Ans) 임펄스 응답

(17) 이산 시스템의 차분 방정식의 계수와 주파수 응답은 무관하다. (○, ×)

Ans) ×

(18) 이산 시스템의 주파수 응답은 복소평면의 (실축, 허축, 단위원)을 따라 계산한 값이다.

Ans) 단위원

(19) 출력의 진폭 스펙트럼은 입력의 진폭 스펙트럼과 진폭 응답의 (합, 곱)이다.

Ans) 곱

(20) 출력의 위상 스펙트럼은 입력의 위상 스펙트럼과 위상 응답의 (합, 곱)이다.

Ans) 합

[기초 문제]

11.1 다음 신호의 이산 시간 푸리에 변환을 구하고, 진폭 및 위상 스펙트럼을 그려라.

(a) $x[n] = [1, 0, 1]$
 $\uparrow$

Ans) $X(\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\Omega n} = 2\cos(\Omega)$

(b) $x[n] = [1, 1, 1]$
 $\uparrow$

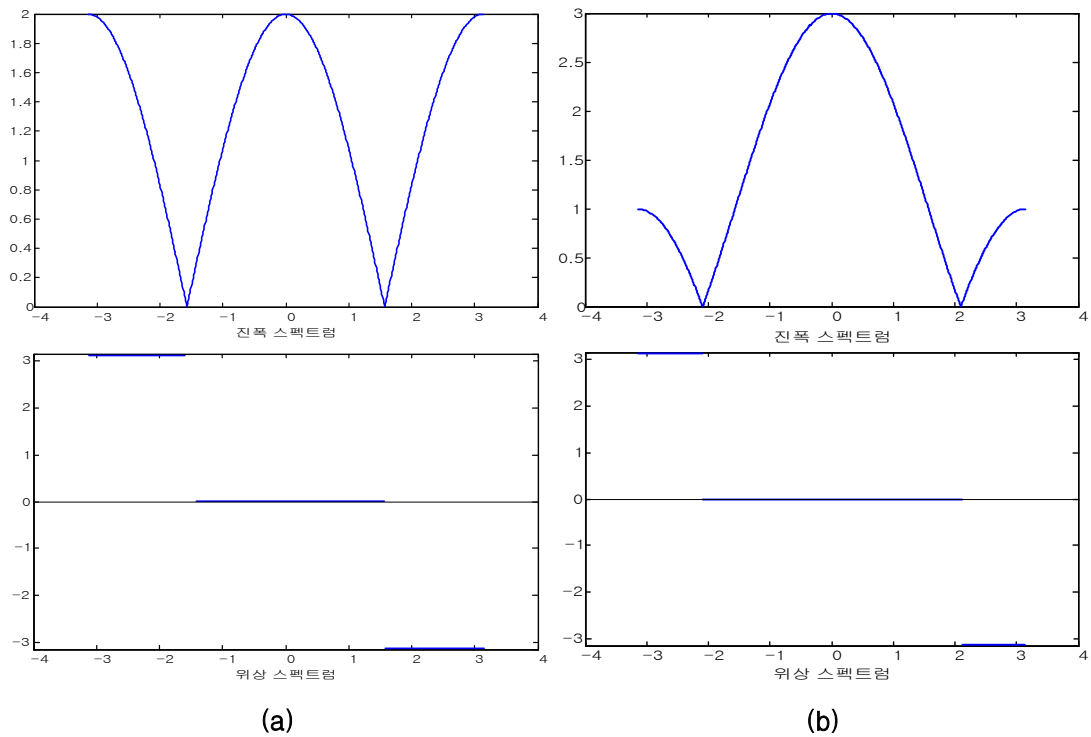
Ans) $X(\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\Omega n} = (1 + 2\cos(\Omega))$

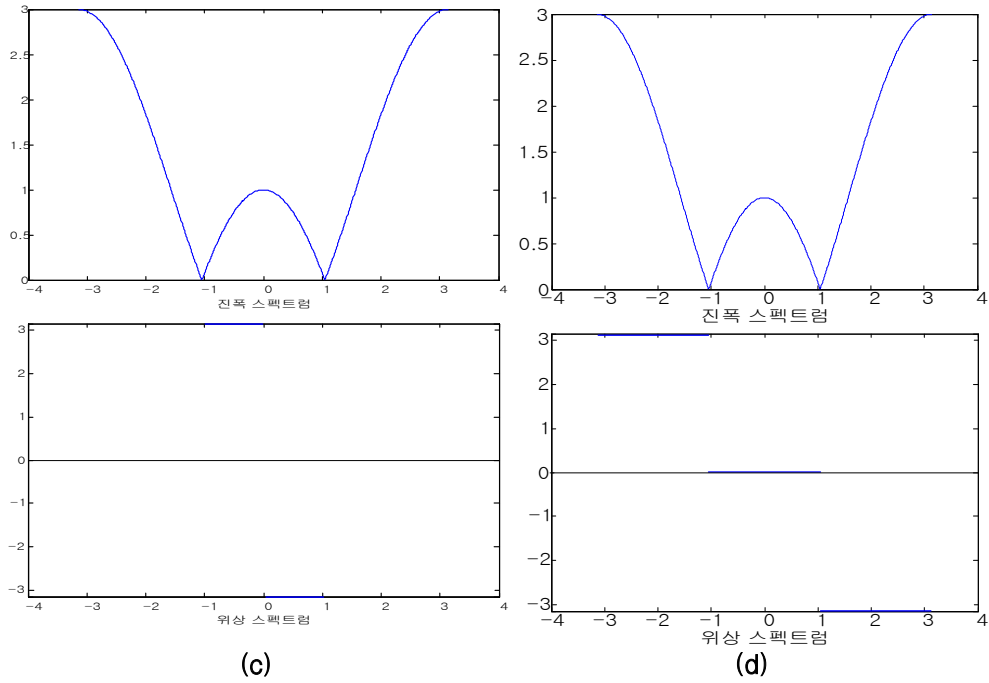
(c) $x[n] = [-1, 1, -1]$
 $\uparrow$

Ans) $X(\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\Omega n} = (1 - 2\cos(\Omega))$

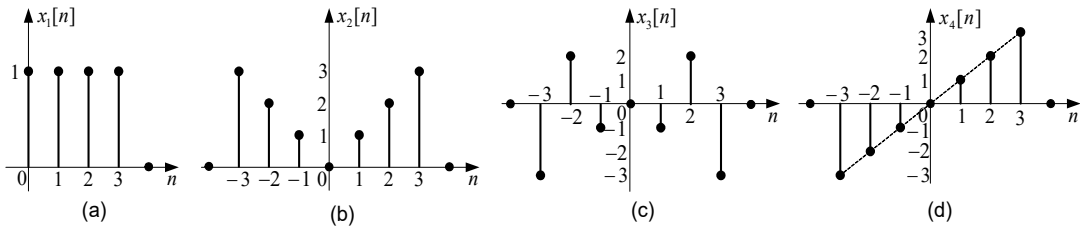
(d) $x[n] = [1, -1, 1]$
 $\uparrow$

Ans) $X(\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\Omega n} = (-1 + 2\cos(\Omega))$





11.2 다음 그림의 이산 신호에 대해 이산 시간 푸리에 변환을 구하라.



(a)

Ans) DTFT의 정의식으로부터

$$X(\Omega) = \sum_{n=0}^3 x[n] e^{-j\Omega n} = 1 + e^{-j\Omega} + e^{-j2\Omega} + e^{-j3\Omega} = 4e^{-j\frac{3}{2}\Omega} \cos\left(\frac{1}{2}\Omega\right) \cos(\Omega)$$

(b)

Ans) DTFT의 정의식으로부터

$$\begin{aligned} X(\Omega) &= \sum_{n=-3}^3 x[n] e^{-j\Omega n} = 3e^{j3\Omega} + 2e^{j2\Omega} + e^{j\Omega} + e^{-j\Omega} + 2e^{-j2\Omega} + 3e^{-j3\Omega} \\ &= 2\cos(\Omega) + 4\cos(2\Omega) + 6\cos(3\Omega) \end{aligned}$$

(c)

Ans) DTFT의 정의식으로부터

$$\begin{aligned} X(\Omega) &= \sum_{n=-3}^3 x[n] e^{-j\Omega n} = -3e^{j3\Omega} + 2e^{j2\Omega} - e^{j\Omega} - e^{-j\Omega} + 2e^{-j2\Omega} - 3e^{-j3\Omega} \\ &= -2\cos(\Omega) + 4\cos(2\Omega) - 6\cos(3\Omega) \end{aligned}$$

(d)

Ans) DTFT의 정의식으로부터

$$\begin{aligned} X(\Omega) &= \sum_{n=-3}^3 x[n] e^{-j\Omega n} = -3e^{j3\Omega} - 2e^{j2\Omega} - e^{j\Omega} + e^{-j\Omega} + 2e^{-j2\Omega} + 3e^{-j3\Omega} \\ &= -j[2\sin(\Omega) + 4\sin(2\Omega) + 6\sin(3\Omega)] \end{aligned}$$

11.3 다음과 같은 이산 주기 신호의 DTFT를 구하여라.

(a) $x[n] = \begin{cases} 1, & n = \text{짝수} \\ 0, & n = \text{홀수} \end{cases}$

Ans) 한 주기 신호 $x'[n]$ 의 DTFT는

$$X'(\Omega) = \sum_{n=0}^1 x'[n] e^{-j\Omega n} = 1$$

$$\Omega_0 = \frac{2\pi}{N} = \pi \text{ 이므로}$$

$$X(\Omega) = \frac{2\pi}{N} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X'(k\Omega_0) \delta(\Omega - k\Omega_0) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \pi \delta(\Omega - k\pi)$$

(b) $x[n] = \begin{cases} 1, & 0 \leq n \leq 1 \\ 0, & 2 \leq n \leq 3 \end{cases}, \quad N=4$

Ans) 한 주기 신호 $x'[n]$ 의 DTFT는

$$X'(\Omega) = \sum_{n=0}^3 x'[n] e^{-j\Omega n} = 1 + e^{-j\Omega}$$

$$\Omega_0 = \frac{2\pi}{N} = \frac{\pi}{2} \text{ 이므로}$$

$$X(\Omega) = \frac{2\pi}{N} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X'(k\Omega_0) \delta(\Omega - k\Omega_0) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{\pi}{2} (1 + e^{-j\frac{\pi}{2}k}) \delta(\Omega - \frac{\pi}{2}k)$$

$$1 + e^{-j\frac{\pi}{2}k} = \begin{cases} 2, & k = 4m \text{ (} m \text{은 정수)} \\ 1 + j, & k = 4m + 1 \text{ (} m \text{은 정수)} \\ 0, & k = 4m + 2 \text{ (} m \text{은 정수)} \\ 1 - j, & k = 4m + 3 \text{ (} m \text{은 정수)} \end{cases}$$

(c) $x[n] = \begin{cases} 1, & 0 \leq n \leq 3 \\ 0, & 4 \leq n \leq 7 \end{cases}, \quad N=8$

Ans) 한 주기 신호 $x'[n]$ 의 DTFT는

$$X'(\Omega) = \sum_{n=0}^7 x'[n] e^{-j\Omega n} = 1 + e^{-j\Omega} + e^{-j2\Omega} + e^{-j3\Omega} = 4e^{-j\frac{3}{2}\Omega} (\cos \frac{\Omega}{2}) (\cos \Omega)$$

$$\Omega_0 = \frac{2\pi}{N} = \frac{\pi}{4} \text{ 이므로}$$

$$X(\Omega) = \frac{2\pi}{N} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X'(k\Omega_0) \delta(\Omega - k\Omega_0) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \pi e^{-j\frac{3\pi}{8}k} (\cos \frac{\pi}{8}k) (\cos \frac{\pi}{4}k) \delta(\Omega - \frac{\pi}{4}k)$$

(d) $x[n] = \cos\left(\frac{\pi}{4}n - \frac{\pi}{4}\right)$

Ans) DTFT는

$$X(\Omega) = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_k \delta(\Omega - k\Omega_0) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2\pi X_k \delta(\Omega - \frac{\pi}{4}k)$$

이 신호의 DTFS의 계수는 다음과 같으므로

$$X_1 = \frac{1}{2} e^{-j\frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{4} - j\frac{\sqrt{2}}{4}$$

$$X_7 = \frac{1}{2} e^{j\frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{4} + j\frac{\sqrt{2}}{4}$$

$$X_k = 0, \quad k = 0, 2, 3, 4, 5, 6$$

스펙트럼의 한 주기 $X'(\Omega)$ 는 다음과 같고

$$X'(\Omega) = \left(\frac{\sqrt{2}\pi}{2} - j \frac{\sqrt{2}\pi}{2} \right) \delta\left(\Omega - \frac{\pi}{4}\right) + \left(\frac{\sqrt{2}\pi}{2} + j \frac{\sqrt{2}\pi}{2} \right) \delta\left(\Omega - \frac{7\pi}{4}\right)$$

$X(\Omega)$ 는 $X'(\Omega)$ 가 2π 주기로 반복된다.

11.4 다음 신호의 이산 시간 푸리에 변환을 구하라.

$$(a) \quad x[n] = (0.5)^n (u[n] - u[n - n_0])$$

Ans) DTFT의 정의식으로부터

$$X(\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-j\Omega n} = \sum_{n=0}^{n_0-1} (0.5)^n e^{-j\Omega n} = \frac{1 - (0.5e^{-j\Omega})^{n_0}}{1 - 0.5e^{-j\Omega}}$$

$$(b) \quad x[n] = (0.5)^n u[n - 3]$$

$$\textbf{Ans)} \quad X(\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-j\Omega n} = \sum_{n=3}^{\infty} (0.5)^n e^{-j\Omega n} = \frac{(0.5e^{-j\Omega})^3}{1 - 0.5e^{-j\Omega}}$$

$$(c) \quad x[n] = (0.5)^{|n|}$$

$$\textbf{Ans)} \quad X(\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{-1} (0.5)^{-n} e^{-j\Omega n} + \sum_{n=0}^{\infty} (0.5)^n e^{-j\Omega n} = \frac{0.75}{1.25 - \cos(\Omega)}$$

$$(d) \quad x[n] = (0.5)^n \cos\left(\frac{\pi}{2}n\right) u[n]$$

$$\textbf{Ans)} \quad x_1[n] = (0.5)^n u[n] \Leftrightarrow X_1(\Omega) = \frac{1}{1 - 0.5e^{-j\Omega}}$$

DTFT의 변조(주파수 이동) 성질을 이용하면

$$\begin{aligned} X(\Omega) &= \frac{1}{2} X_1\left(\Omega - \frac{\pi}{2}\right) + \frac{1}{2} X_1\left(\Omega + \frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{2} \frac{1}{1 - 0.5e^{-j(\Omega - \frac{\pi}{2})}} + \frac{1}{2} \frac{1}{1 - 0.5e^{-j(\Omega + \frac{\pi}{2})}} \\ &= \frac{1}{1 + (0.5)^2 e^{-j2\Omega}} = \frac{1}{1 + 0.25e^{-j2\Omega}} \end{aligned}$$

11.5 이산 시간 푸리에 변환의 성질을 이용하여 다음 이산 신호의 이산 시간 푸리에 변환을 구하라.

$$(a) \quad y[n] = \sum_{m=0}^{n_0} \delta[n - m]$$

Ans) DTFT쌍 $\delta[n] \Leftrightarrow 1$ 과 DTFT의 선형성과 시간 이동 성질을 이용하면

$$Y(\Omega) = 1 + e^{-j\Omega} + \dots + e^{-jn_0\Omega} = \frac{1 - e^{-j(n_0+1)\Omega}}{1 - e^{-j\Omega}} = e^{-j\frac{n_0}{2}\Omega} \frac{\sin\left(\frac{n_0+1}{2}\Omega\right)}{\sin\left(\frac{1}{2}\Omega\right)}$$

$$(b) \quad y[n] = (0.5)^{-n} u[-n]$$

$$\textbf{Ans)} \quad x[n] = (0.5)^n u[n] \Leftrightarrow X(\Omega) = \frac{1}{1 - 0.5e^{-j\Omega}} \text{과 DTFT의 시간 반전 성질을 이용하면}$$

$$Y(\Omega) = X(-\Omega) = \frac{1}{1 - 0.5e^{j\Omega}}$$

(c) $y[n] = n(0.5)^{|n|}$

Ans) $x[n] = (0.5)^{|n|} = (0.5)^n u[n] + (0.5)^{-n} u[-n] - \delta[n]$ 이라고 하면

$$X(\Omega) = \frac{1}{1 - 0.5e^{-j\Omega}} + \frac{1}{1 - 0.5e^{j\Omega}} - 1 = \frac{0.75}{(1 - 0.5e^{-j\Omega})(1 - 0.5e^{j\Omega})} = \frac{0.75}{1.25 - \cos\Omega}$$

DTFT의 주파수 미분 성질을 이용하면

$$Y(\Omega) = j \frac{dX(\Omega)}{d\Omega} = -j \frac{0.75 \sin(\Omega)}{(1.25 - \cos(\Omega))^2}$$

(d) $x[n] = (n+1)(0.5)^n u[n]$

Ans) $x[n] = (0.5)^n u[n] + n(0.5)^n u[n]$ 이므로 DTFT의 주파수 미분 성질을 이용하면

$$X(\Omega) = \frac{1}{1 - 0.5e^{-j\Omega}} + \frac{0.5e^{-j\Omega}}{(1 - 0.5e^{-j\Omega})^2} = \frac{1}{(1 - 0.5e^{-j\Omega})^2}$$

11.6 다음과 같이 DTFT가 주어질 때, 이에 대응하는 이산 신호를 구하라.

(a) $X(\Omega) = 1 + 2\cos(2\Omega)$

Ans) $X(\Omega) = 1 + e^{j2\Omega} + e^{-j2\Omega}$

$\delta[n] \Leftrightarrow 1$ 과 DTFT의 시간 이동 성질로부터

$$x[n] = \delta[n] + \delta[n+2] + \delta[n-2]$$

(b) $X(\Omega) = -2 + j\sin(4\Omega)$

Ans) $X(\Omega) = \frac{1}{2}e^{j4\Omega} - \frac{1}{2}e^{-j4\Omega} - 2$

$\delta[n] \Leftrightarrow 1$ 과 DTFT의 시간 이동 성질로부터

$$x[n] = \frac{1}{2}\delta[n+4] - \frac{1}{2}\delta[n-4] - 2\delta[n]$$

(c) $X(\Omega) = \cos(2\Omega) - j\sin(2\Omega)$

Ans) $X(\Omega) = e^{-j2\Omega}$

$\delta[n] \Leftrightarrow 1$ 과 DTFT의 시간 이동 성질로부터

$$x[n] = \delta[n-2]$$

(d) $X(\Omega) = \frac{4}{(2 - e^{-j\Omega})^2}$

Ans) $X(\Omega) = \frac{4}{(2 - e^{-j\Omega})^2} = \frac{1}{(1 - 0.5e^{-j\Omega})^2} = \frac{1}{1 - 0.5e^{-j\Omega}} \times \frac{1}{1 - 0.5e^{-j\Omega}}$

따라서 DTFT의 시간 컨벌루션 성질을 이용하면

$$x[n] = (0.5)^n u[n] * (0.5)^n u[n] = (n+1)(0.5)^n$$

11.7 다음과 같은 차분 방정식으로 표현되는 이산 LTI 시스템의 주파수 응답과 임펄스 응답을 구하라.

(a) $y[n] + 0.8y[n-1] = x[n] - 0.5x[n]$

Ans) $Y(\Omega) + 0.8e^{-j\Omega} Y(\Omega) = X(\Omega) - 0.5e^{-j\Omega} X(\Omega)$

주파수 응답

$$H(\Omega) = \frac{Y(\Omega)}{X(\Omega)} = \frac{1 - 0.5e^{-j\Omega}}{1 + 0.8e^{-j\Omega}} = \frac{1}{1 + 0.8e^{-j\Omega}} - \frac{0.5e^{-j\Omega}}{1 + 0.8e^{-j\Omega}}$$

임펄스 응답

$$h[n] = (0.8)^n u[n] - 0.5(0.8)^{n-1} u[n-1] = \delta[n] + 0.3(0.8)^{n-1} u[n-1]$$

(b) $y[n] + 0.64y[n-2] = x[n-1]$

Ans) $Y(\Omega) + 0.64e^{-j2\Omega} Y(\Omega) = e^{-j\Omega} X(\Omega)$

주파수 응답

$$H(\Omega) = \frac{Y(\Omega)}{X(\Omega)} = \frac{e^{-j\Omega}}{1 + 0.64e^{-j2\Omega}} = \frac{e^{-j\Omega}}{2} \left(\frac{1}{1 - 0.8e^{-j\frac{\pi}{2}} e^{-j\Omega}} + \frac{1}{1 - 0.8e^{j\frac{\pi}{2}} e^{-j\Omega}} \right)$$

임펄스 응답

$$h[n] = \frac{1}{2} \left((0.8e^{-j\frac{\pi}{2}})^{(n-1)} u[n-1] + (0.8e^{j\frac{\pi}{2}})^{(n-1)} u[n-1] \right) = (0.8)^{n-1} \cos\left(\frac{\pi}{2}(n-1)\right) u[n-1]$$

(c) $y[n] - \frac{5}{6}y[n-1] + \frac{1}{6}y[n-2] = x[n-1]$

Ans) $Y(\Omega) - \frac{5}{6}e^{-j\Omega} Y(\Omega) + \frac{1}{6}e^{-j2\Omega} Y(\Omega) = e^{-j\Omega} X(\Omega)$

주파수 응답

$$H(\Omega) = \frac{Y(\Omega)}{X(\Omega)} = \frac{e^{-j\Omega}}{1 - \frac{5}{6}e^{-j\Omega} + \frac{1}{6}e^{-j2\Omega}} = \frac{6}{1 - \frac{1}{2}e^{-j\Omega}} - \frac{6}{1 - \frac{1}{3}e^{-j\Omega}}$$

임펄스 응답

$$h[n] = 6\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] - 6\left(\frac{1}{3}\right)^n u[n]$$

(d) $y[n] - 0.3y[n-1] - 0.4y[n-2] = 2x[n-1] - x[n-2]$

Ans) $Y(\Omega) - 0.3e^{-j\Omega} Y(\Omega) - 0.4e^{-j2\Omega} Y(\Omega) = 2e^{-j\Omega} X(\Omega) - e^{-j2\Omega} X(\Omega)$

주파수 응답

$$\begin{aligned} H(\Omega) &= \frac{Y(\Omega)}{X(\Omega)} = \frac{2e^{-j\Omega} - e^{-j2\Omega}}{1 - 0.3e^{-j\Omega} - 0.4e^{-j2\Omega}} \\ &= e^{-j\Omega} \left(\frac{10/13}{1 + 0.5e^{-j\Omega}} + \frac{16/13}{1 - 0.8e^{-j\Omega}} \right) - e^{-j2\Omega} \left(\frac{5/13}{1 + 0.5e^{-j\Omega}} + \frac{8/13}{1 - 0.8e^{-j\Omega}} \right) \end{aligned}$$

임펄스 응답

$$\begin{aligned} h[n] &= \frac{10}{13}(-0.5)^{n-1} u[n-1] + \frac{16}{13}(0.8)^{n-1} u[n-1] - \frac{5}{13}(-0.5)^{n-2} u[n-2] - \frac{8}{13}(0.8)^{n-2} u[n-2] \\ &= 2\delta[n-1] - \frac{10}{13}(-0.5)^{n-2} u[n-2] + \frac{24}{65}(0.8)^{n-2} u[n-2] \end{aligned}$$

11.8 다음의 임펄스 응답을 갖는 이산 LTI 시스템에 $x[n] = \cos(\frac{3\pi}{4}n)$ 을 입력으로 인가할 때 출력 $y[n]$ 을 구하라.

(a) $h[n] = [1 \ 1, \ 1]$
 $\uparrow$

Ans) $Y(\Omega) = H(\Omega)X(\Omega) = (e^{j\Omega} + 1 + e^{-j\Omega})(\pi\delta(\Omega + \frac{3\pi}{4}) + \pi\delta(\Omega - \frac{3\pi}{4}))$

$$y[n] = \cos(\frac{3\pi}{4}(n+1)) + \cos(\frac{3\pi}{4}n) + \cos(\frac{3\pi}{4}(n-1))$$

(b) $h[n] = [-1 \ 1, \ -1]$
 $\uparrow$

Ans) $Y(\Omega) = H(\Omega)X(\Omega) = (-e^{j\Omega} + 1 - e^{-j\Omega})(\pi\delta(\Omega + \frac{3\pi}{4}) + \pi\delta(\Omega - \frac{3\pi}{4}))$

$$y[n] = -\cos(\frac{3\pi}{4}(n+1)) + \cos(\frac{3\pi}{4}n) - \cos(\frac{3\pi}{4}(n-1))$$

11.9 입력 $x[n] = \delta[n] + 0.5\delta[n-1]$ 에 대한 출력이 $y[n] = \delta[n] - 2\delta[n-1] - \delta[n-2]$ 와 같은 이산 시스템에 대해 다음을 구하라.

(a) 이 시스템의 주파수 응답

Ans) $H(\Omega) = \frac{Y(\Omega)}{X(\Omega)} = \frac{1 - 2e^{-j\Omega} - e^{-j2\Omega}}{1 + 0.5e^{-j\Omega}}$

(b) 이 시스템의 임펄스 응답

Ans) $H(\Omega) = \frac{1 - 2e^{-j\Omega} - e^{-j2\Omega}}{1 + 0.5e^{-j\Omega}} = \frac{1}{1 + 0.5e^{-j\Omega}} - \frac{2e^{-j\Omega}}{1 + 0.5e^{-j\Omega}} - \frac{e^{-j2\Omega}}{1 + 0.5e^{-j\Omega}}$

$$h[n] = (-0.5)^n u[n] - 2(-0.5)^{n-1} u[n-1] - (-0.5)^{n-2} u[n-2]$$

$$= \delta[n] - 2.5\delta[n-1] + (-0.5)^n u[n-2]$$

(c) 이산 시스템을 나타내는 차분 방정식 표현

Ans) $(1 + 0.5e^{-j\Omega})Y(\Omega) = (1 - 2e^{-j\Omega} - e^{-j2\Omega})X(\Omega)$

$$y[n] + 0.5y[n-1] = x[n] - 2x[n-1] - x[n-2]$$

11.10 차분 방정식 $y[n] = 0.5y[n-1] + bx[n]$ 으로 표현되는 이산 LTI 시스템에 대해 다음을 구하라.

(a) $H(0) = 1$ 이 되기 위한 b 의 값

Ans) $H(0) = \frac{b}{1 - 0.5e^{-j0}} = \frac{b}{1 - 0.5} = 1$

$$\therefore b = 0.5$$

(b) 반전력 주파수

Ans) $|H(\Omega)|^2 = \frac{b^2}{(1 - 0.5\cos\Omega)^2 + (0.5\sin\Omega)^2} = \frac{0.25}{1.25 - \cos\Omega} = \frac{1}{2}$

$$\therefore \cos\Omega = 0.75 \rightarrow \Omega = 0.23\pi$$

[응용 문제]

11.11 다음의 이산 시간 푸리에 변환쌍 중 틀린 것은?

$$\textcircled{㉠} (0.5)^{2n}u[n] \Leftrightarrow \frac{1}{1-0.5e^{-j0.5\Omega}}$$

$$\textcircled{㉡} 4(n-2)(0.5)^n u[n-2] \Leftrightarrow \frac{0.5e^{-j3\Omega}}{(1-0.5e^{-j\Omega})^2}$$

$$\textcircled{㉢} (0.5)^n u[n] * \delta[n-1] \Leftrightarrow \frac{e^{-j\Omega}}{1-(0.5)e^{-j\Omega}}$$

$$\textcircled{㉣} (0.5)^n u[n-1] * (0.5)^{n-1} u[n-1] \Leftrightarrow \frac{0.5e^{-j2\Omega}}{(1-0.5e^{-j\Omega})^2}$$

Ans) $\textcircled{㉠}$

$$(0.5)^{2n}u[n] = (0.5^2)^n u[n] \Leftrightarrow \frac{1}{1-0.5^2 e^{-j\Omega}} = \frac{1}{1-0.25e^{-j\Omega}}$$

11.12 $x[n] = na^n u[n]$ 의 DTFT를 다음의 두 가지 방법으로 구하여라.

(a) DTFT의 정의식을 이용

Ans) $(1-ae^{-j\Omega})X(\Omega) = \sum_{n=1}^{\infty} (ae^{-j\Omega})^n = \frac{ae^{-j\Omega}}{1-ae^{-j\Omega}}$

$$\therefore X(\Omega) = \frac{1}{1-ae^{-j\Omega}} \frac{ae^{-j\Omega}}{1-ae^{-j\Omega}} = \frac{ae^{-j\Omega}}{(1-ae^{-j\Omega})^2}$$

(b) DTFT와 시간 컨벌루션 성질 이용

Ans) $x[n] = a^n u[n] * a^n u[n] - a^n u[n]$

DTFT의 시간 컨벌루션 성질을 이용하면

$$X(\Omega) = \frac{1}{1-ae^{-j\Omega}} \frac{1}{1-ae^{-j\Omega}} - \frac{1}{1-ae^{-j\Omega}} = \frac{ae^{-j\Omega}}{(1-ae^{-j\Omega})^2}$$

11.13 다음 신호의 이산 시간 푸리에 변환을 구하라.

(a) $n(u[n+N] - u[n-N-1])$

Ans) DTFT의 정의식으로부터

$$\begin{aligned} X(\Omega) &= \sum_{n=-N}^N n e^{-j\Omega n} = -j2(\sin(\Omega) + 2\sin(2\Omega) + 3\sin(3\Omega) + \dots + N\sin(N\Omega)) \\ &= -j2 \sum_{k=1}^N k \sin(k\Omega) \end{aligned}$$

(b) $x[n] = (n-1)(0.5)^n u[n]$

Ans) $x_1[n] = (0.5)^n u[n] \Leftrightarrow X_1(\Omega) = \frac{1}{1-0.5e^{-j\Omega}}$

$$x_2[n] = n(0.5)^n u[n] \Leftrightarrow X_2(\Omega) = j \frac{dX_1(\Omega)}{d\Omega} = \frac{0.5e^{-j\Omega}}{(1-0.5e^{-j\Omega})^2}$$

$x[n] = x_2[n] - x_1[n]$ 이므로

$$X(\Omega) = X_2(\Omega) - X_1(\Omega) = \frac{e^{-j\Omega} - 1}{(1-0.5e^{-j\Omega})^2}$$

(c) $x[n] = (0.5)^n u[n] + (-1)^n (0.5)^n u[n]$

Ans) $x_1[n] = (0.5)^n u[n] \Leftrightarrow X_1(\Omega) = \frac{1}{1 - 0.5e^{-j\Omega}}$

$$x_2[n] = (-0.5)^n u[n] \Leftrightarrow X_2(\Omega) = \frac{1}{1 + 0.5e^{-j\Omega}}$$

$$X(\Omega) = X_1(\Omega) + X_2(\Omega) = \frac{1}{1 - 0.5e^{-j\Omega}} + \frac{1}{1 + 0.5e^{-j\Omega}} = \frac{2}{1 - 0.25e^{-j2\Omega}}$$

(d) $x[n] = (0.5)^n u[n] + (0.5)^{-n} u[-n-1]$

Ans) $x_1[n] = (0.5)^n u[n] \Leftrightarrow X_1(\Omega) = \frac{1}{1 - 0.5e^{-j\Omega}}$

$$x_2[n] = (0.5)^{-n} u[-n-1] \Leftrightarrow X_2(\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{-1} (0.5)^{-n} e^{-j\Omega n} = \frac{0.5e^{j\Omega}}{1 - 0.5e^{j\Omega}}$$

$$X(\Omega) = X_1(\Omega) + X_2(\Omega) = \frac{1}{1 - 0.5e^{-j\Omega}} + \frac{0.5e^{j\Omega}}{1 - 0.5e^{j\Omega}} = \frac{0.75}{1.25 - \cos\Omega} = \frac{3}{5 - 4\cos\Omega}$$

11.14 다음과 같이 DTFT가 주어질 때, 이에 대응하는 이산 신호를 구하라.

(a) $X(\Omega) = \begin{cases} 0, & 0 \leq |\Omega| \leq \frac{3\pi}{4} \\ 1, & \frac{3\pi}{4} < |\Omega| \leq \pi \end{cases}$

Ans) IDTFT의 정의식으로부터

$$\begin{aligned} x[n] &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{-\frac{3\pi}{4}} e^{j\Omega n} d\Omega + \frac{1}{2\pi} \int_{\frac{3\pi}{4}}^{\pi} e^{j\Omega n} d\Omega \\ &= \frac{1}{\pi n} \left(\sin(\pi n) - \sin\left(\frac{3\pi}{4}n\right) \right) = \text{sinc}(\pi n) - \frac{3}{4} \text{sinc}\left(\frac{3\pi}{4}n\right) \end{aligned}$$

(b) $|X(\Omega)| = \begin{cases} 0, & 0 \leq |\Omega| \leq \frac{\pi}{3} \\ 1, & \frac{\pi}{3} < |\Omega| \leq \frac{2\pi}{3}, \quad \angle X(\Omega) = 2\Omega \\ 0, & \frac{2\pi}{3} < |\Omega| \leq \pi \end{cases}$

Ans) IDTFT의 정의식으로부터

$$\begin{aligned} x[n] &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\frac{2\pi}{3}}^{-\frac{\pi}{3}} e^{j2\Omega} e^{j\Omega n} d\Omega + \frac{1}{2\pi} \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}} e^{j2\Omega} e^{j\Omega n} d\Omega \\ &= \frac{1}{\pi(n+2)} \left(\sin\left(\frac{2\pi}{3}(n+2)\right) - \sin\left(\frac{\pi}{3}(n+2)\right) \right) = \frac{2}{3} \text{sinc}\left(\frac{2\pi}{3}(n+2)\right) - \frac{1}{3} \text{sinc}\left(\frac{\pi}{3}(n+2)\right) \end{aligned}$$

11.15 $x[n]$ 의 DTFT가 $X(\Omega) = \frac{1}{1 - 0.5e^{-j\Omega}}$ 일 때, 주어진 각 신호의 DTFT를 구하여라.

(a) $y[n] = x[-n]$

Ans) DTFT의 시간 반전 성질에 의해

$$Y(\Omega) = X(-\Omega) = \frac{1}{1 - 0.5e^{j\Omega}}$$

(b) $y[n] = x[n-1]$

Ans) DTFT의 시간이동 성질에 의해

$$Y(\Omega) = e^{-j\Omega} X(\Omega) = \frac{e^{-j\Omega}}{1 - 0.5e^{j\Omega}}$$

(c) $y[n] = nx[n]$

Ans) DTFT의 주파수 미분 성질에 의해

$$Y(\Omega) = j \frac{dX(\Omega)}{d\Omega} = - \frac{0.5e^{-j\Omega}}{(1 + 0.5e^{-j\Omega})^2}$$

(d) $y[n] = x[n+1] + x[n-1]$

Ans) DTFT의 선형성과 시간 이동 성질에 의해

$$Y(\Omega) = e^{j\Omega} X(\Omega) + e^{-j\Omega} X(\Omega) = \frac{2\cos(\Omega)}{1 - 0.5e^{-j\Omega}}$$

(e) $y[n] = x[n]\cos(\pi n)$

Ans) $w[n] = \cos(\pi n)$ 라 두면, DTFT의 주파수 컨벌루션 성질에 의해

$$Y(\Omega) = \frac{1}{2\pi} X(\Omega) * W(\Omega) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1 - 0.5e^{-j\Omega}} \right) * (\delta(\Omega + \pi) + \delta(\Omega - \pi)) = \frac{1}{1 + 0.5e^{-j\Omega}}$$

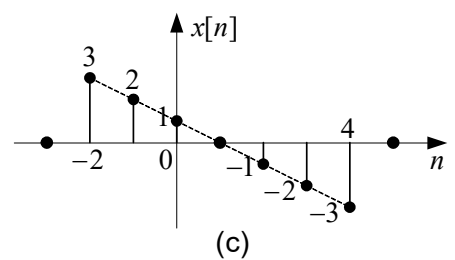
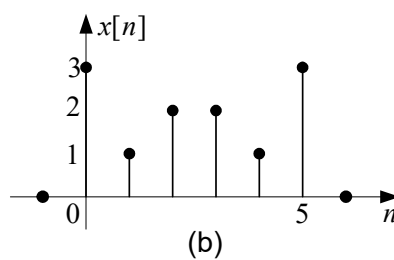
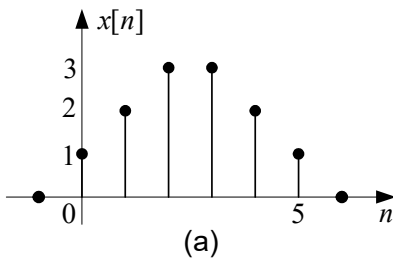
(f) $y[n] = x[n] * x[n]$

Ans) DTFT의 시간 컨벌루션 성질에 의해

$$Y(\Omega) = X(\Omega) X(\Omega) = \frac{1}{(1 - 0.5e^{-j\Omega})^2}$$

11.16 다음 그림의 신호 $x[n]$ 에 대해, $X(\Omega)$ 를 직접 구하지 말고 다음의 값을 구하라.

(i) $X(0)$ (ii) $X(\pi)$ (iii) $\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(\Omega) d\Omega$ (iv) $\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |X(\Omega)|^2 d\Omega$



(a)

Ans) (1) $X(0)$

$$X(0) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-j\Omega n} \Big|_{\Omega=0} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]$$

$$\therefore X(0) = 1 + 2 + 3 + 3 + 2 + 1 = 12$$

(2) $X(\pi)$

$$X(\pi) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-j\Omega n} \Big|_{\Omega=\pi} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n x[n]$$

$$\therefore X(\pi) = 1 - 2 + 3 - 3 + 2 - 1 = 0$$

$$(3) \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(\Omega) d\Omega$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(\Omega) d\Omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(\Omega) e^{j\Omega n} d\Omega \Big|_{n=0} = x[0] = 1$$

$$(4) \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |X(\Omega)|^2 d\Omega$$

파스발 정리를 이용하면

$$\therefore \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |X(\Omega)|^2 d\Omega = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 3^2 + 2^2 + 1^2 = 28$$

(b)

Ans) (1) $X(0)$

$$X(0) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-j\Omega n} \Big|_{\Omega=0} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]$$

$$\therefore X(0) = 3 + 1 + 2 + 2 + 1 + 3 = 12$$

(2) $X(\pi)$

$$X(\pi) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-j\Omega n} \Big|_{\Omega=\pi} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n x[n]$$

$$\therefore X(\pi) = 3 - 1 + 2 - 2 + 1 - 3 = 0$$

$$(3) \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(\Omega) d\Omega$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(\Omega) d\Omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(\Omega) e^{j\Omega n} d\Omega \Big|_{n=0} = x[0] = 3$$

$$(4) \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |X(\Omega)|^2 d\Omega$$

파스발 정리를 이용하면

$$\therefore \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |X(\Omega)|^2 d\Omega = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|^2 = 3^2 + 1^2 + 2^2 + 2^2 + 1^2 + 3^2 = 28$$

(c)

Ans) (1) $X(0)$

$$X(0) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-j\Omega n} \Big|_{\Omega=0} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]$$

$$\therefore X(0) = 3 + 2 + 1 + 0 - 1 - 2 - 3 = 0$$

(2) $X(\pi)$

$$X(\pi) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-j\Omega n} \Big|_{\Omega=\pi} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n x[n]$$

$$\therefore X(\pi) = 3 - 2 + 1 - 0 + 1 - 2 + 3 = 4$$

$$(3) \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(\Omega) d\Omega$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(\Omega) d\Omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(\Omega) e^{j\Omega n} d\Omega \Big|_{n=0} = x[0] = 1$$

$$(4) \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |X(\Omega)|^2 d\Omega$$

파스발 정리를 이용하면

$$\therefore \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |X(\Omega)|^2 d\Omega = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|^2 = 3^2 + 2^2 + 1^2 + (-1)^2 + (-2)^2 + (-3)^2 = 28$$

11.17 파스발 정리를 이용하여 신호 $x[n] = \text{sinc}(\frac{n}{2})\cos(\frac{\pi}{2}n)$ 의 에너지를 구하라.

Ans) $x'[n] = \text{sinc}(\frac{n}{2})$ & 변조 성질을 이용

$$X(\Omega) = \frac{1}{2} X'(\Omega - \frac{\pi}{2}) + \frac{1}{2} X'(\Omega + \frac{\pi}{2}) = \text{rect}(\frac{\Omega}{\pi} - \frac{1}{2}) + \text{rect}(\frac{\Omega}{\pi} + \frac{1}{2}) = \text{rect}(\frac{\Omega}{2\pi})$$

파스발 정리를 이용하면

$$E_x = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |X(\Omega)|^2 d\Omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |\text{rect}(\frac{\Omega}{2\pi})|^2 d\Omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} 1 d\Omega = 1$$

11.18 임펄스 응답이 $h[n] = \sin(\frac{\pi}{4}n)$ 인 이산 시스템에 입력 $x[n] = \cos(\frac{\pi}{3}n)$ 을 넣을 때 출력 $y[n]$ 을 구하라.

$$\text{Ans)} Y(\Omega) = H(\Omega)X(\Omega) = j\pi^2(\delta(\Omega + \frac{\pi}{4}) - \delta(\Omega - \frac{\pi}{4}))(\delta(\Omega + \frac{\pi}{3}) - \delta(\Omega - \frac{\pi}{3})) = 0$$

$$y[n] = 0$$

11.19 인과 LTI 시스템이 차분 방정식 $y[n] + 0.5y[n-1] = x[n]$ 으로 표현된다고 한다.

(a) 시스템의 주파수 응답 $H(\Omega)$ 를 구하라.

$$\text{Ans)} Y(\Omega) + 0.5e^{-j\Omega} Y(\Omega) = X(\Omega)$$

$$\therefore H(\Omega) = \frac{1}{1 + 0.5e^{-j\Omega}}$$

(b) 시스템의 임펄스 응답 $h[n]$ 을 구하라.

$$\text{Ans)} H(\Omega) = \frac{1}{1 + 0.5e^{-j\Omega}} = \frac{1}{1 - (-0.5e^{-j\Omega})}$$

$$h[n] = (-0.5)^n u[n]$$

(c) 입력이 $x[n] = (0.5)^n u[n]$ 일 때 시스템 출력을 구하라.

$$\text{Ans)} Y(\Omega) = X(\Omega)H(\Omega) = \frac{1}{(1 + 0.5e^{-j\Omega})(1 - 0.5e^{-j\Omega})} = \frac{0.5}{1 + 0.5e^{-j\Omega}} + \frac{0.5}{1 - 0.5e^{-j\Omega}}$$

$$y[n] = 0.5(-0.5)^n u[n] + 0.5(0.5)^n u[n] = ((-0.5)^{n-1} + (0.5)^{n+1})u[n]$$

(d) 입력의 DTFT가 $X(\Omega) = \frac{1}{(1 - 0.25e^{-j\Omega})(1 + 0.5e^{-j\Omega})}$ 일 때 시스템 출력을 구하라.

Ans)
$$Y(\Omega) = X(\Omega)H(\Omega) = \frac{1}{(1 - 0.25e^{-j\Omega})(1 + 0.5e^{-j\Omega})} \frac{1}{1 + 0.5e^{-j\Omega}}$$

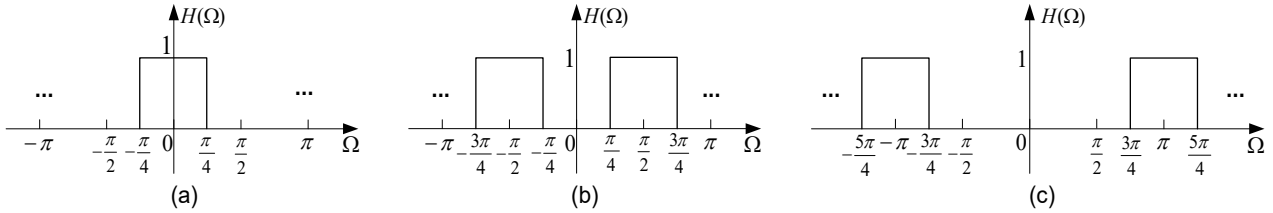
$$= \frac{1/9}{1 - 0.25e^{-j\Omega}} + \frac{2/9}{1 + 0.5e^{-j\Omega}} + \frac{2/3}{(1 + 0.5e^{-j\Omega})^2}$$

$$y[n] = \frac{1}{9}(0.25)^n u[n] + \frac{2}{9}(-0.5)^n u[n] + \frac{2}{3}(n+1)(-0.5)^n u[n]$$

11.20 주파수 응답이 다음 그림과 같은 이산 시스템이 있다. 이 시스템의 임펄스 응답을 구하고, 아래와 같은 입력을 인가할 때 출력을 구하라.

(i) $x_1[n] = 1 + \cos(\frac{\pi}{6}n) + \cos(\frac{\pi}{3}n) + \sin(\frac{5\pi}{6}n)$

(ii) $x_2[n] = \delta[n] + \cos(\frac{\pi}{2}n)$



Ans)
$$X_1(\Omega) = 2\pi\delta(\Omega) + \pi(\delta(\Omega + \frac{\pi}{6}) + \delta(\Omega - \frac{\pi}{6})) + \pi(\delta(\Omega + \frac{\pi}{3}) + \delta(\Omega - \frac{\pi}{3})) + j\pi(\delta(\Omega + \frac{5\pi}{6}) - \delta(\Omega - \frac{5\pi}{6}))$$

$$X_2(\Omega) = 1 + \pi(\delta(\Omega + \frac{\pi}{2}) + \delta(\Omega - \frac{\pi}{2}))$$

(a)

(1) $x_1[n] = 1 + \cos(\frac{\pi}{6}n) + \cos(\frac{\pi}{3}n) + \sin(\frac{5\pi}{6}n)$

$$Y(\Omega) = H(\Omega)X_1(\Omega) = 2\pi\delta(\Omega) + \pi(\delta(\Omega + \frac{\pi}{6}) + \delta(\Omega - \frac{\pi}{6}))$$

$$\therefore y[n] = 1 + \cos(\frac{\pi}{6}n)$$

(2) $x[n] = \delta[n] + \cos(\frac{\pi}{2}n)$

$$Y(\Omega) = H(\Omega)X_2(\Omega) = H(\Omega)$$

$$\therefore y[n] = h[n] = \frac{1}{4}\text{sinc}(\frac{n}{4})$$

(b)

(1) $x_1[n] = 1 + \cos(\frac{\pi}{6}n) + \cos(\frac{\pi}{3}n) + \sin(\frac{5\pi}{6}n)$

$$Y(\Omega) = H(\Omega)X_1(\Omega) = \pi(\delta(\Omega + \frac{\pi}{3}) + \delta(\Omega - \frac{\pi}{3}))$$

$$\therefore y[n] = \cos(\frac{\pi}{3}n)$$

(2) $x[n] = \delta[n] + \cos(\frac{\pi}{2}n)$

$$Y(\Omega) = H(\Omega)X_2(\Omega) = H(\Omega) + \pi(\delta(\Omega + \frac{\pi}{2}) + \delta(\Omega - \frac{\pi}{2}))$$

$$\therefore y[n] = h[n] + \cos(\frac{\pi}{2}n) = \frac{1}{2}\text{sinc}(\frac{n}{4})\cos(\frac{\pi}{2}n) + \cos(\frac{\pi}{2}n) = (1 + \frac{1}{2}\text{sinc}(\frac{n}{4}))\cos(\frac{\pi}{2}n)$$

(c)

$$(1) \quad x_1[n] = 1 + \cos(\frac{\pi}{6}n) + \cos(\frac{\pi}{3}n) + \sin(\frac{5\pi}{6}n)$$

$$Y(\Omega) = H(\Omega)X_1(\Omega) = j\pi(\delta(\Omega + \frac{5\pi}{6}) - \delta(\Omega - \frac{5\pi}{6}))$$

$$\therefore y[n] = \sin(\frac{5\pi}{6}n)$$

$$(2) \quad x[n] = \delta[n] + \cos(\frac{\pi}{2}n)$$

$$Y(\Omega) = H(\Omega)X_2(\Omega) = H(\Omega)$$

$$y[n] = h[n] = \frac{1}{2}\text{sinc}(\frac{n}{4})\cos(\pi n) = (-1)^n \frac{1}{2}\text{sinc}(\frac{n}{4})$$